

# Action mécanique transmissible par une liaison

contribution réalisée par Ludovic WAGNER

## Liaison parfaite

### Définition :

Une liaison parfaite est une liaison tel que :

- Les possibilités de mouvement relatif sont obtenus à partir de surface de contacts géométriquement parfaite qui ont entres elles un jeu de fonctionnement supposé nul,
- le contact de ces surfaces est supposé sans adhérence.

Une liaison parfaite est donc une liaison théorique.

A chaque mobilité correspond une composante nulle du torseur de liaison.

A chaque non-mobilité correspond une composante du torseur de liaison.

$$\begin{pmatrix} T_x & R_x \\ T_y & R_y \\ T_z & R_z \end{pmatrix} \Rightarrow [T_{1 \rightarrow 2}] = \left\{ \begin{array}{cc} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{array} \right\}_A$$

$$[T_{1 \rightarrow 2}]_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{A_{1 \rightarrow 2}} = \sum \overrightarrow{F_{i1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_A^{1 \rightarrow 2}} = \sum (\overrightarrow{AP_i} \wedge \overrightarrow{F_{i1 \rightarrow 2}}) \end{array} \right\}_A$$

### Actions mutuelles

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = -\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}}$$

$$[T_{1 \rightarrow 2}]_A = \left\{ \overrightarrow{A_{1 \rightarrow 2}} = \sum \overrightarrow{F_{i1 \rightarrow 2}} \overrightarrow{M_A^{1 \rightarrow 2}} = \sum (\overrightarrow{AP_i} \wedge \overrightarrow{F_{i1 \rightarrow 2}}) \right\}_A$$

$$[T_{1 \rightarrow 2}]_A = \left\{ \overrightarrow{A_{1 \rightarrow 2}} = \sum \overrightarrow{F_{i1 \rightarrow 2}} = -\sum \overrightarrow{F_{i2 \rightarrow 1}} = -\overrightarrow{A_{2 \rightarrow 1}} \overrightarrow{M_A^{1 \rightarrow 2}} = \sum (\overrightarrow{AP_i} \wedge \overrightarrow{F_{i1 \rightarrow 2}}) = -\overrightarrow{M_A^{2 \rightarrow 1}} \right\}_A$$

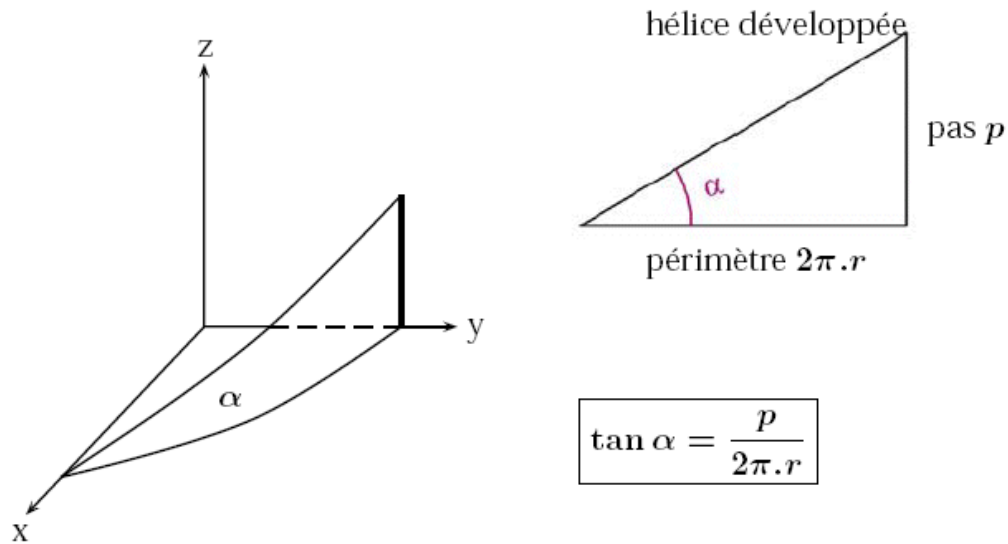
D'où  $\boxed{[T_{1 \rightarrow 2}] = -[T_{2 \rightarrow 1}]}$

## Liaison mécanique parfaite

**Exemple :** Linéique annulaire d'axe  $x$

$$\begin{pmatrix} T_x & R_x \\ 0 & R_y \\ 0 & R_z \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{array} \right\}$$

## Cas particulier : l'Hélicoïdale



**Exemple :** hélicoïdale d'axe  $x$

$$\begin{pmatrix} T_x & R_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } T_x = R_x \frac{p}{2\pi} \leftarrow R_x \text{ en radians}$$

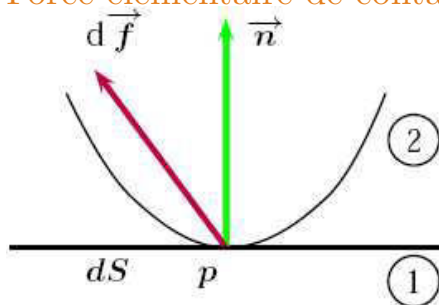
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\} \text{ avec } \underline{5 \text{ inconnus}}$$

### Contacts réels entre solides

Si l'effort s'exerce en un point, la pression de contact devient infinie ce qui est impossible, il existe donc une surface finie de contact (écrasement),  $d\vec{f}$  est la force de contact de 1  $\rightarrow$  2 s'appliquant sur un élément de surface  $dS$ .

### Contact réel entres solides

#### Force élémentaire de contacts



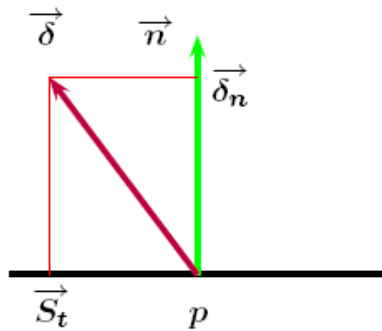
### Densité de force

#### Définition :

La densité de force de contact de 1  $\rightarrow$  2 au point  $p$  est la limite du rapport  $\frac{d\vec{f}}{dS}$  quand  $dS$  tend vers 0.

D'où  $\vec{\delta} = \frac{d\vec{f}}{dS}$  avec  $df$  en N,  $dS$  en mm et  $\delta$  en MPa.

$\vec{\delta}$  est un bipoint, projection ce vecteur, densité  $\vec{\delta}$  sur le plan  $p$  et la normale  $\vec{n}$  à ce plan.



$\delta_n$  est appelé densité normale en  $p$   
 $\delta_t$  est appelé densité tangentielle de  $\vec{n}$  en  $p$   
 $\|\vec{\delta}\|$  est appelé pression locale de contact  $p$

## Loi de Coulomb

Soit deux solides en contacts.

### ⚠ Définition :

- il y a adhérence en  $p$  si il n'y a pas de mouvement relatif entre 1 et 2 au point  $p$ .  
D'où  $\vec{V}_{p1 \rightarrow 2} = \vec{0}$
- il y a frottements en  $p$  si il y a mouvement relatif entre 1 et 2 au point  $p$ .  
D'où  $\vec{V}_{p1 \rightarrow 2} \neq \vec{0}$
- $\vec{V}_{p1 \rightarrow 2}$  est appelé vecteur vitesse de glissement au point  $p$ .

### Premier cas : $\vec{V}_{p1 \rightarrow 2} \neq \vec{0}$

Il y a glissement relatif de 2/1 en  $p$ .

Le support de la force élémentaire de la force de contact  $(p, d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}) \in (p, \vec{n}, \vec{V}_{p2/1})$ , se support est incliné d'un angle  $\varphi$  par rapport à la normale du côté opposé à  $V$ , on a  $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{V}_{1 \rightarrow 2} < 0$

L'angle  $\varphi$  caractérise la nature du contact en  $p$  des solides 1 et 2, il ne dépend que de la nature des matériaux et de l'état des deux surfaces en contact.

### ⚠ Définition :

$f = \tan \varphi$  est appelé coefficient de frottement.

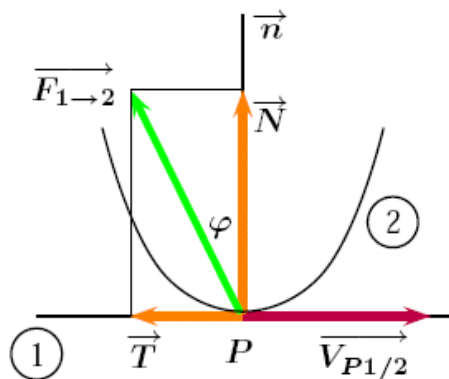
### Exemples :

- acier sur acier poli à sec  $f = 0.10$
- fonte sur fonte au bronze à sec  $f = 0.16$
- acier ou fonte sur bronze ou fonte lubrifiée  $f = 0.07$
- acier ou fonte sur garniture de frictions à sec (Ferodo)  $f = 0.45$
- pneu neuf sur chaussée sèche  $f = 0.60$
- pneu neuf sur chaussée mouillée  $f = 0.35$

## Conséquence des lois de Coulombs

Quand deux solides glissent l'un sur l'autre, le support de la force de contact  $\vec{F}_{i1 \rightarrow 2}$  en  $P_i$  se trouve sur la surface d'un cône de sommet  $P_i$  d'axe  $P_i \vec{n}$  et de demi angle au sommet  $\varphi$  tel que  $\tan \varphi = f$ , se cône est appelé cône de frottements en  $P_i$ , l'angle  $\varphi$  est appelé angle de frottement.

## Projection



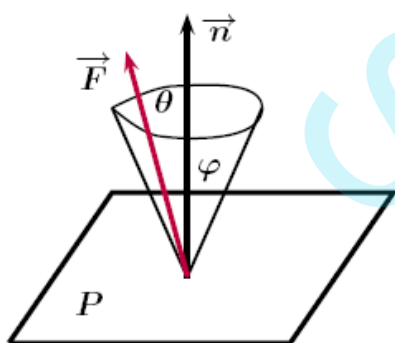
Soit  $\vec{T}$  la projection de  $\vec{F}$  dans le plan tangent commun

et  $\vec{N}$  la projection de  $\vec{F}$  sur la normale  $p\vec{n}$ , on a

$$\|\vec{T}\| = \|\vec{N}\|.f$$

### Deuxième cas : $\vec{V}_{p2/1}$

Il y a adhérence de 2 sur 1 en  $p$ . Le support de la force de contact  $\vec{F}_{p2/1}$  fait avec l'axe  $p\vec{n}$  un angle  $\theta$  inconnu tel que  $\theta < \varphi$ . On sait seulement que le support de la force se trouve l'intérieur du cône de frottement.



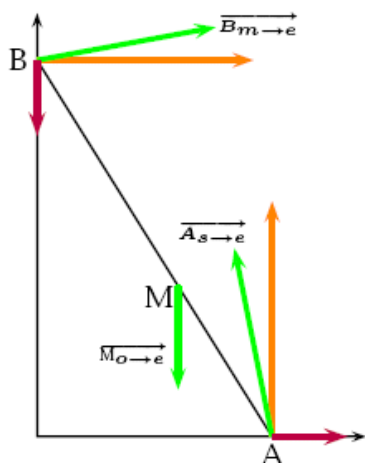
### Cas particulier important

Pour résoudre un problème, on se place habituellement dans le cas limite appelé équilibre strict pour lequel il y a équilibre limite ou tendance au mouvement, alors  $\theta = \varphi$ . Donc si  $\vec{V}_{p2/1} = \vec{0}$ , deux cas possibles.

- équilibre
- équilibre strict

soit  $\|\vec{T}\| \leq \|\vec{N}\|.f$ .

### Exemple



AB=6 cm  
 AM=d  
 en A et B  $f = 0.1$   
 $\alpha = 30^\circ; 50^\circ; 70^\circ$   
 $\|\vec{M}\| = 800 \text{ N}$

## Calcul de la distance $AM$ maximale pour $\alpha = \{30^\circ; 50^\circ; 70^\circ\}$ Expressions analytiques

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{ABET} = 6 \cos(\alpha) \\ ET = 6 \sin(\alpha) \\ ET \perp o \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AMET} = d \cos(\alpha) \\ ET = d \sin(\alpha) \\ ET \perp o \end{array} \right\}$$

### Torseur

$$\left[ T_{\text{sol} \rightarrow \text{echelle}} \right]_A = \left\{ \begin{array}{c|c|c} \overrightarrow{A_{s \rightarrow e}} & \begin{array}{l} -A \sin \varphi \\ A \cos \varphi \\ 0 \end{array} & \overrightarrow{m_A^{s \rightarrow \tilde{e}}} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \end{array} \right\}_B$$

$$\left[ T_{\text{mur} \rightarrow \text{echelle}} \right]_B = \left\{ \begin{array}{c|c|c} \overrightarrow{B_{m \rightarrow e}} & \begin{array}{l} B \cos \varphi \\ B \sin \varphi \\ 0 \end{array} & \overrightarrow{m_B^{m \rightarrow \tilde{e}}} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \end{array} \right\}_B$$

$$\left[ T_{\text{ouvrier} \rightarrow \text{echelle}} \right]_M = \left\{ \begin{array}{c|c|c} \overrightarrow{M_{o \rightarrow e}} & \begin{array}{l} 0 \\ -800 \\ 0 \end{array} & \overrightarrow{m_M^{o \rightarrow \tilde{e}}} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \end{array} \right\}_M$$

### Changement de points

$$\left[ T_{\text{sol} \rightarrow \text{echelle}} \right]_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{A_{s \rightarrow e}} \\ \overrightarrow{m_A^{s \rightarrow \tilde{e}}} = \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

$$\left[ T_{\text{mur} \rightarrow \text{echelle}} \right]_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{B_{m \rightarrow e}} \\ \overrightarrow{m_A^{m \rightarrow \tilde{e}}} = \overrightarrow{m_B^{m \rightarrow \tilde{e}}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{B_{m \rightarrow e}} \end{array} \right\}_A$$

$$\left[ T_{\text{ouvrier} \rightarrow \text{echelle}} \right]_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{M_{o \rightarrow e}} \\ \overrightarrow{m_A^{o \rightarrow \tilde{e}}} = \overrightarrow{m_M^{o \rightarrow \tilde{e}}} + \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{M_{o \rightarrow e}} \end{array} \right\}_A$$

$$\left[ T_{\text{sol} \rightarrow \text{echelle}} \right]_A = \left\{ \begin{array}{c|c|c} \overrightarrow{A_{s \rightarrow e}} & \begin{array}{l} -A \sin \varphi \\ A \cos \varphi \\ 0 \end{array} & \overrightarrow{m_A^{s \rightarrow \tilde{e}}} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \end{array} \right\}_A$$

$$\left[ T_{\text{mur} \rightarrow \text{echelle}} \right]_A = \left\{ \begin{array}{c|c|c} \overrightarrow{B_{m \rightarrow e}} & \begin{array}{l} B \cos \varphi \\ B \sin \varphi \\ 0 \end{array} & \overrightarrow{m_A^{m \rightarrow \tilde{e}}} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -6B \sin(\alpha + \varphi) \end{array} \right. \end{array} \right\}_A$$

$$\left[ T_{\text{ouvrier} \rightarrow \text{echelle}} \right]_A = \left\{ \begin{array}{c|c|c} \overrightarrow{M_{o \rightarrow e}} & \begin{array}{l} 0 \\ -800 \\ 0 \end{array} & \overrightarrow{m_A^{o \rightarrow \tilde{e}}} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 800d \cos(\alpha) \end{array} \right. \end{array} \right\}_A$$

$$\text{On a } (S) \begin{cases} -A \sin(\varphi) + B \cos(\varphi) = 0 & (L_1) \\ A \cos(\varphi) + B \sin(\varphi) - 800 = 0 & (L_2) \\ -6B \sin(\alpha + \varphi) + 800s \cos(\alpha) = 0 & (L_3) \end{cases}$$

$$B = A \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \quad (L_1)$$

$$A \frac{\cos^2(\varphi)}{\cos(\varphi)} + A \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos(\varphi)} - 800 = 0 \quad (L_2)$$

$$\frac{A}{\cos(\varphi)} = 800 \implies A = 800 \cos(\varphi)$$

$$\begin{cases} A = 800 \cos(\varphi) \\ B = 800 \sin(\varphi) \end{cases}$$

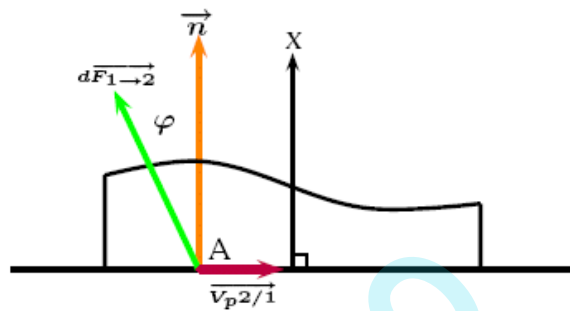
$$\begin{cases} 800d \cos(\alpha) = 6 \times 800 \sin(\varphi) \sin(\alpha + \varphi) \\ d = 6 \times \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\alpha)} \sin(\alpha + \varphi) \end{cases}$$

	$\alpha$	$d$
On trouve	$30^\circ$	0.424
	$50^\circ$	0.767
	$70^\circ$	1.692

## Torseur d'action mécanique réel

Dans une liaison réelle, étant donné qu'il peut y avoir un mouvement relatif, il existe un jeu fonctionnel. Les surfaces en contact se sont jamais parfaites et on ne peut pas toujours négliger les frottements.

**Exemple :** liaison appui plan réelle d'axe  $\vec{x}$



$(A; \vec{x})$  : normale au plan de contact

$(A; \vec{x}; \vec{z})$  : plan de symétrie de la force appliquée

La force élémentaire de contact en  $p$  est inclinée par rapport à la normale  $p\vec{n}$  de l'angle  $\varphi$  en sens contraire de  $\vec{v}_{p2/1}$ . Le torseur de liaison  $[T_{1 \rightarrow 2}]_A$  se définit par

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{1 \rightarrow 2} = \sum d\vec{F}_{i1 \rightarrow 2} \\ \vec{m}_A^{1 \rightarrow 2} = \sum (\vec{AP}_i \wedge d\vec{F}_{i1 \rightarrow 2}) \end{array} \right\}_A$$

la résultante  $\vec{A}_{1 \rightarrow 2}$  de toutes les forces élémentaires de contact  $d\vec{F}_{i1 \rightarrow 2}$  fait aussi un angle  $\varphi$  par rapport à la normale donc,  $\vec{A}_{1 \rightarrow 2} = X\vec{x} + Z\vec{z}$ .

Le moment  $\vec{m}_A^{1 \rightarrow 2}$  est porté par l'axe  $O\vec{y}$  donc, de la forme  $\vec{m}_A^{1 \rightarrow 2} = M\vec{y}$ .

$$[T_{1 \rightarrow 2}]_A = \begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_A$$