

Probabilités

I. Une urne contient neuf boules : deux boules portant le numéro 1, quatre boules portant le numéro 2 et trois boules portant le numéro 3.
On prend au hasard une boule dans l'urne (on suppose que tous les tirages sont équiprobables).
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le numéro de la boule tirée.
Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique E(X).

II. Les boules sont maintenant réparties dans une urne A et une urne B : l'urne A contient deux boules portant le numéro 1 et deux boules portant le numéro 2, l'urne B contient deux boules portant le numéro 2 et trois boules portant le numéro 3.
On considère l'épreuve aléatoire suivante : on prend au hasard une boule dans l'urne A (chacune des quatre boules a la même probabilité d'être tirée), on place cette boule dans l'urne B, on prend au hasard une boule dans l'urne B (chacune des six boules a la même probabilité d'être tirée), on place cette boule dans l'urne A.

Soit les événements suivants :
A_1 : « la boule prise dans l'urne A porte le numéro 1 »
A_2 : « la boule prise dans l'urne A porte le numéro 2 »
B_1 : « la boule prise dans l'urne B porte le numéro 1 »
B_2 : « la boule prise dans l'urne B porte le numéro 2 »

1. Déterminer :
   a) la probabilité de A_1 ;
   b) la probabilité de B_1, sachant que A_1 est réalisé ;
   c) Montrer que la probabilité de $A_1 \cap B_1$ est $\frac{1}{12}$.

2. Montrer que la probabilité de $A_2 \cap B_2$ est $\frac{1}{4}$.

3. Calculer la probabilité que, à l'issue de l'épreuve, l'urne A se retrouve dans son état initial, c'est-à-dire qu'elle contienne à nouveau deux boules portant le numéro 1 et deux boules portant le numéro 2.

Correction

I. L'urne contient 9 boules : 2 portent le numéro 1, 4 le numéro 2 et 3 le numéro 3.
On tire au hasard une boule de cette urne, et tous les tirages sont équiprobables.
X désignant la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le numéro de la boule tirée, nous en déduisons que :
$p(X = 1) = \frac{2}{9}$, $p(X = 2) = \frac{4}{9}$, $p(X = 3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
La loi de probabilité de X est la suivante :

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$

Nous avons : $E(X) = 1 \times p(X = 1) + 2 \times p(X = 2) + 3 \times p(X = 3)$
$E(X) = \frac{2}{9} + \frac{8}{9} + 1$
$E(X) = \frac{19}{9}$.
L'espérance mathématique de X est égale à $\frac{19}{9}$.

II. 1. a) $p(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

b) Si A_1 est réalisé, il y a alors 6 boules dans l'urne B et une seule porte le numéro 1 (c'est celle qui a été tirée dans l'urne A).
Nous pouvons en déduire que : $p(B_1/A_1) = \frac{1}{6}$.

c) $p(A_1 \cap B_1) = p(B_1/A_1) \times p(A_1) = \frac{1}{12}$.

2. Procédons de même pour calculer la probabilité $A_2 \cap B_2$.
L'urne A contient 4 boules dont 2 portent le numéro 2, donc : $p(A_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
Si l'événement A_2 est réalisé, l'urne B contient 6 boules et 3 d'entre elles portent le numéro 2. Par conséquent, $p(B_2/A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
D'où : $p(A_2 \cap B_2) = p(B_2/A_2) \times p(A_2) = \frac{1}{4}$.

3. A l'issue de l'épreuve, l'urne A se retrouve dans son état initial lorsque l'on a :
- soit tiré de l'urne A une boule portant le numéro 1, et ensuite tiré une boule portant le numéro 1 de l'urne B, ce qui correspond à l'événement $A_1 \cap B_1$.
- soit tiré une boule portant le numéro 2 de l'urne A, puis tiré une boule portant le numéro 2 de l'urne B, ce qui correspond à l'événement $A_2 \cap B_2$.

Les événements $A_1 \cap B_1$ et $A_2 \cap B_2$ sont incompatibles.
La probabilité p pour que l'urne A se retrouve dans son état initial est donc donnée par :
$p = p((A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2)) = p(A_1 \cap B_1) + p(A_2 \cap B_2) = \frac{1}{3}$.
Donc la probabilité pour que l'urne A se retrouve dans son état initial à l'issue de l'épreuve est égale à $\frac{1}{3}$.

