Exercice sur les probabilités conditionnelles

Exercice

Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus.
On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$ (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$ (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement "la personne est contaminée par le virus" et T l'évènement "le test est positif".
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1 a Préciser les valeurs des probabilités $p(V)$, $p_V(T)$, $p_{\overline{V}}(\overline{T})$.
Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.

2 Démontrer que la probabilité que le test soit positif est $0,049\ 2$.

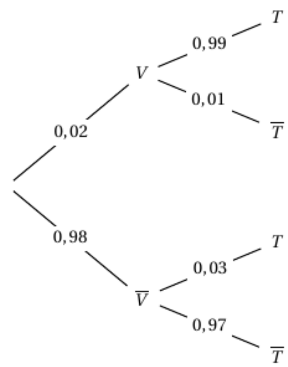
3 a Justifier par un calcul la phrase :«Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de "chances" que la personne soit contaminée ».

b Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

4 Les événements V et T sont-ils indépendants ?

Correction

1 a $p(V) = 0,02 \qquad p_V(T) = 0,99 \qquad p_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right) = 0,97.$
On obtient ainsi l'arbre suivant :



b On a donc $p(V \cap T) = 0,02 \times 0,99 = 0,0198$
2 D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(T \cap V) + p\left(T \cap \overline{V}\right) \\ &= 0,0198 + 0,98 \times 0,03 \\ &= 0,0198 + 0,0294 \\ &= 0,0492 \end{aligned}$$

3 a Il s'agit d'évaluer $p_T(V)$: $p_T(V) = \dfrac{p(V \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,0198}{0,0492} \approx 0,4024.$
Si le test est positif, il n'y a donc qu'environ 40% de "chances" que la personne soit contaminée.
b On veut calculer $p_{\overline{T}}\left(\overline{V}\right)$: $p_{\overline{T}}\left(\overline{V}\right) = \dfrac{p\left(\overline{V} \cap \overline{T}\right)}{p\left(\overline{T}\right)} = \dfrac{0,98 \times 0,97}{1 - 0,0492} \approx 0,9998.$
La probabilité que la personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que le test est négatif est donc de 99,98%.
4 $p_V(T) = 0,99$ et $p(T) = 0,0492$. Donc $p_V(T) \neq p(T)$,les événements ne sont donc pas indépendants.