

Probabilité conditionnelle



Prérequis :

Ce chapitre s'appuie sur les connaissances que tu as acquises sur les probabilités au lycée. Il faut que tu sois capable de synthétiser un énoncé à l'aide d'un tableau ou d'un arbre. La notion d'événement contraire et le cours sur la loi binomiale doivent être bien compris.



Enjeu :

Le but de ce chapitre est de calculer des probabilités d'événements sachant qu'un autre s'est déjà produit. Il faudra être très rigoureux dans l'analyse des énoncés pour déterminer quelle probabilité est demandée.

1 Probabilité conditionnelle

Voici un tableau fournissant, dans une classe, la répartition des filles et des garçons demi-pensionnaires et externes.

On remarque pour la construction du tableau, que sur une ligne (ou une colonne), un événement et son contraire sont écrits : (demi-pensionnaire ou externe d'une part, fille ou garçon d'autre part).

	Demi-pensionnaires	Externes	Total
Filles	11	6	17
Garçons	13	2	15
Total	24	8	32

On choisit un élève au hasard. On appelle :

- F l'événement "l'élève est une fille"
- G l'événement "l'élève est un garçon"
- D l'événement "l'élève est demi-pensionnaire"

On a donc $p(F) = \frac{17}{32}$, $p(D) = \frac{24}{32}$

L'événement "l'élève choisi est une fille demi-pensionnaire" est $F \cap D$.

Sa probabilité est $p(F \cap D) = \frac{11}{32}$.

Tous ces calculs font intervenir l'effectif total de la classe. Voyons maintenant ce qui se passe quand on se restreint à un groupe particulier.

L'élève choisi est une fille. La probabilité qu'elle soit demi-pensionnaire est de $\frac{11}{17}$.

Cette probabilité est une **probabilité conditionnelle** c'est-à-dire qu'on a considéré qu'un événement s'est déjà produit et on calcule la probabilité d'un second événement. On va noter cette probabilité $p_F(D)$.

On constate que $p_F(D) = \frac{\frac{11}{32}}{\frac{17}{32}} = \frac{p(F \cap D)}{p(F)}$.



Définition :

On considère deux événements A et B d'un univers Ω tels que $p(A) \neq 0$.

La probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est déjà réalisé (on dira plus simplement la probabilité de B sachant A) est $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Exemple : En reprenant les données du tableau, la probabilité de F sachant D est $p_D(F) = \frac{p(D \cap F)}{p(D)} =$

$$\frac{\frac{11}{32}}{\frac{24}{32}} = \frac{11}{24}.$$

Il s'agit de la probabilité que l'élève soit une fille sachant qu'on a choisi un élève demi-pensionnaire.

Remarque : Il s'agit d'un nouveau type de probabilité mais ces probabilités conditionnelles vérifient les mêmes propriétés que les probabilités vues jusque là.

⚠ Propriétés :

On considère deux événements A et B d'un univers Ω tels que $p(A) \neq 0$.

On a :

- $0 \leq p_A(B) \leq 1$.
- $p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$.
- $p_A(\emptyset) = 0$.

Démonstration :

- $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ Il s'agit d'un quotient de nombres positifs donc $p_A(B) \geq 0$.

De plus l'événement $A \cap B$ est inclus dans A . Par conséquent $p(A \cap B) \leq p(A)$. Ainsi $p_A(B) \leq 1$.

- $p_A(B) + p_A(\bar{B}) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} + \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(A)} = \frac{p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})}{p(A)} = \frac{p(A)}{p(A)} = 1$.

- $p_A(\emptyset) = \frac{p(A \cap \emptyset)}{p(A)} = \frac{0}{p(A)} = 0$.

La définition d'une probabilité conditionnelle nous permet d'écrire cette propriété fournissant la probabilité de l'intersection de deux événements.

⚠ Propriété :

On considère deux événements A et B d'un univers Ω tels que $p(A) \neq 0$.

$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$ (avec $p(B) \neq 0$ pour cette dernière égalité).

Démonstration :

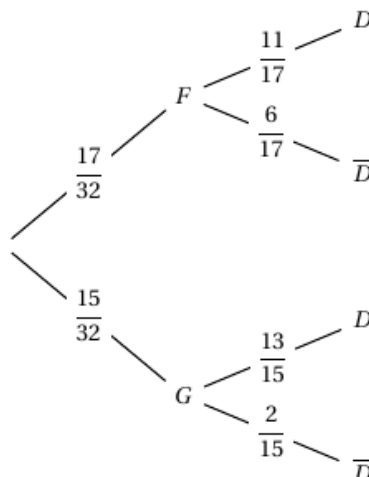
On a $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ donc $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$.

Si $p(B) \neq 0$ on a également $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ donc $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$.

2 Arbres pondérés

Il est parfois utile de schématiser une situation dans laquelle interviennent les probabilités par un arbre. On note dans cet arbre les événements et les probabilités associées.

On reprend l'exemple du début de chapitre. On peut représenter la situation à l'aide de l'arbre suivant :



- Les probabilités inscrites au premier niveau sont $p(F)$ et $p(G)$.
- Au deuxième niveau il s'agit des probabilités conditionnelles sachant F ou sachant G .
On devrait écrire en toute rigueur D sachant F , $\bar{D}$ sachant F etc. ce qui n'est pas fait dans la pratique.
- La somme des probabilités issues d'un noeud vaut toujours 1.
- Pour calculer par exemple $p(F \cap D)$, il suffit de multiplier les probabilités du chemin passant par F et D .



Propriété (Formule des probabilités totales) :

On considère deux événements A et B tels que $0 < p(A) < 1$.

On a $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$.

Remarque : On peut généraliser cette propriété en disant que $p(B)$ est égale à la somme des probabilités des feuilles d'un arbre auxquelles B est associé. Cela permet de traiter les cas où B est associé à plus de deux événements.

Exemple : D'après la formule des probabilités totales on a :

$$p(D) = p(F \cap D) + p(G \cap D)$$

$$= \frac{17}{32} \times \frac{11}{17} + \frac{15}{32} \times \frac{13}{15}$$

$$= \frac{24}{32}$$

$$= \frac{3}{4}$$

On retrouve évidemment le résultat fourni par le tableau.

3 Événements indépendants

Lorsque deux événements se produisent il est naturel de se poser la question si l'un a ou n'a pas d'influence sur l'autre. C'est ce qu'on appelle en probabilité l'**indépendance**.



Définition :

On considère deux événements A et B d'un univers Ω .

A et B sont dits **indépendants** si, et seulement si, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Exemple : On tire, au hasard, une carte dans un jeu de 52 cartes.

On appelle :

- A "la carte tirée est un as" ;

- B "la carte tirée est rouge".

$$p(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \quad p(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2} \quad p(A \cap B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} \quad (\text{puisque'il n'y a que deux as rouges dans le jeu}).$$

$$D'autre part : p(A) \times p(B) = \frac{1}{13} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{26} = p(A \cap B)$$

Par conséquent les événements A et B sont indépendants.



Propriété :

Si deux événements A et B sont indépendants alors les événements A et $\bar{B}$ le sont aussi.

Démonstration :

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$$

$$= p(A) \times p(B) + p(A \cap \bar{B}) \quad \text{car } A \text{ et } B \text{ sont des événements indépendants.}$$

$$\text{Par conséquent } p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A) \times p(B) = p(A)(1 - p(B)) = p(A) \times p(\bar{B}).$$

Donc A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Il existe une autre façon de caractériser l'indépendance de deux événements :

**Propriété :**

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants
si, et seulement si, $p_A(B) = p(B)$
(ou si, et seulement si, $p_B(A) = p(A)$).

Démonstration :

A et B indépendants $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \Leftrightarrow p_A(B) \times p(A) = p(A) \times p(B) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B)$ car $p(A) \neq 0$

On procéderait de la même façon pour montrer la deuxième équivalence.

Remarque : Attention à ne pas confondre "événements indépendants" et "événements incompatibles".

Skolarr